Лекція № 19

5.6. Рівняння Максвелла в SI (в міжнародній системі одиниць System International)

Напишемо рівняння Максвелла в диференціальній формі в міжнародній системі одиниць. В SI електромагнітне поле характеризується чотирма векторами:

$\vec{E}$ – напруженість електричного поля;

$\vec{D}$ – індукція електричного поля (електрична індукція);

$\vec{B}$ – індукція магнітного поля (магнітна індукція);

$\vec{H}$ – напруженість магнітного поля.

Зв'язок між відповідними напруженостями та індукціями в вакуумі дається формулами

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \tag{5.38}$$

Тут $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi c^2} \cdot 10^7 \dfrac{\varPhi}{м}$ – діелектрична стала ($c = 3 \cdot 10^8 \dfrac{м}{c}$ – швидкість світла в вакуумі); $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{Г}{м}$ – магнітна стала. Як бачимо, добуток $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c.$

Діелектрична стала та магнітна стала не мають фізичного значення, але $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c.$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{B} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{D} = \rho; \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \end{cases} \tag{5.39}$$

В SI доводиться користуватися чотирма різними векторами $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$, які описують електромагнітне поле у вакуумі. Вони мають різні розмірності для компонент єдиного електромагнітного поля, що є недоліком системи SI. Необхідність введення 4 векторів пов'язана з тим, що в SI є 4 основні величини: кілограм, метр, секунда та одиниця вимірювання електричного струму – Ампер. Ампер був введений ще до «відкриття» рівнянь Максвелла з чисто практичних міркувань та ніяк не пов'язаний з цими рівняннями.

В теоретичній фізиці найбільш зручною є система одиниць Гауса, в якій є тільки 3 основні величини – сантиметр, грам, секунда. Саме нею ми будемо користуватися в цьому курсі.

5.7. Рівняння для електромагнітних потенціалів

Підставимо в рівняння Максвелла написані через тензор електромагнітного поля (5.31) вираз цього тензору через 4-потенціал. Першу пару візьмемо у вигляді

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0\,.$$

Коваріантні компоненти

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right)+\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l}-\frac{\partial A_l}{\partial x^i}\right)=0;$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^l\partial x^i}}-\cancel{\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l\partial x^k}}+\cancel{\frac{\partial^2 A_l}{\partial x^i\partial x^k}}-\cancel{\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i\partial x^l}}+\cancel{\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k\partial x^l}}-\cancel{\frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k\partial x^i}}=0;$$

Перша пара рівнянь Максвелла для 4-потенціалу перетворюються у тотожність та виконана автоматично.

В другу пару

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=-\frac{4\pi}{c}\,j^i.$$

підставимо контраваріантні компоненти

$$F^{ik}=\frac{\partial A^k}{\partial x_i}-\frac{\partial A^i}{\partial x_k}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x_i}-\frac{\partial A^i}{\partial x_k}\right)=-\frac{4\pi}{c}\,j^i;$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial A^k}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial A^i}{\partial x_k}=-\frac{4\pi}{c}\,j^i.$$

Рівняння Максвелла для 4-потенціалу в загальному вигляді є таким

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^k}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k}A^i=-\frac{4\pi}{c}j^i. \quad (5.40)$$

Величина $\frac{\partial A^k}{\partial x^k}$, яка входить в перший доданок (5.40) є 4-дивергенцією. Згадаємо, що на 4-потенціал має властивість калібрувальної інваріантності. Напруженості електричного та магнітного полів не змінюються при додаванні до 4-потенціалу градієнту довільної скалярної функції 4-радіус-вектору. (Див. параграф 4.4 конспекту лекцій)

Обираємо релятивістськи інваріантне калібрування Лоренца, яке накладає на 4-потенціал додаткову умову

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k}=0. \quad (5.41)$$

У тривимірних позначеннях $A^i=(\varphi,\vec{A})$ калібрування Лоренца матиме вигляд

$$\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \quad (5.42)$$

З урахуванням (5.41) маємо замість (5.40)

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k}A^i=-\frac{4\pi}{c}j^i;$$

Згадаємо визначення оператора Д'аламбера

$$\Box=-\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta; \quad (5.43)$$

$\Delta=\nabla^2$ – оператор Лапласа.

Рівняння Максвелла для 4-потенціалу з урахуванням калібрування Лоренца має вигляд

$$\Box A^i=-\frac{4\pi}{c}j^i; \quad (5.44)$$

В тривимірних позначеннях

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-4\pi\rho;\\&\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}.\end{aligned} \quad (5.45)$$

Обидва рівняння (5.45) представляють собою неоднорідні хвильові рівняння.

Іноді обирають замість калібрування Лоренца (5.41) калібрування Кулона

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0, \tag{5.46}$$

яким користуються для розгляду нерелятивістських задач магнітостатики (постійного магнітного поля)

5.8. Граничні умови для векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$

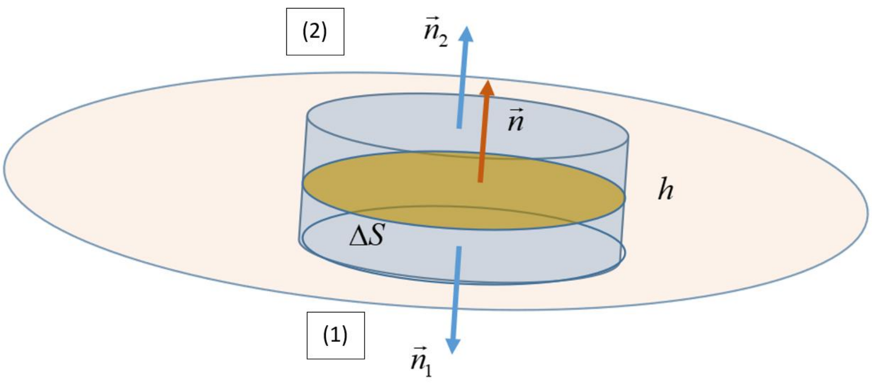
В рівняння Максвелла входять густина зарядів ρ та густина струму $\vec{j}$. Розглянемо поверхні, на яких ці величини мають особливості (стрибки скінченні або нескінченні). Такі поверхні створюються матеріальними тілами – діелектриками, провідниками, намагніченими тілами, тобто суцільними середовищами. На цих поверхнях похідні від $\vec{E}$ та $\vec{H}$ можуть втратити значення та разом з цими похідними й рівняння Максвелла, до яких вони входять. На цих особливих поверхнях диференціальні рівняння замінюються деякими умовами зшивання компонент поля, які виводяться з інтегральної форми рівнянь Максвелла (5.30).

Почнемо з пошуку граничних умов для нормальних компонент напруженості електричного поля.

Виберемо замкнену поверхню, по якій виконується інтегрування в рівнянні

$$\oiint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi \oiiint_V \rho dV$$

у вигляді нескінченно малої циліндричної поверхні, яка охоплює нескінченно малу площину особливої поверхню так, що верхня та нижня площини циліндру лежать в різних областях 1 та 2 та є паралельними особливій поверхні, а напрямна перпендикулярна особливій поверхі (див. рис.).



ΔS – площа основи циліндричної поверхні, h – висота цієї поверхні. На нескінченно малій поверхні напруженості в областях 1 та 2 можна вважати сталими. Інтеграл $\oiint\limits_S \vec{E}d\vec{S}$ розбивається на три доданки (три потоки вектору напруженості електричного поля через три поверхні)

$$\oiint\limits_S \vec{E}d\vec{S} \approx E_{n_2}\Delta S + E_{n_1}\Delta S + N_{бок.пов.}.$$

Тут

$$E_{n_2} = (\vec{E},\vec{n}_2) = (\vec{E},\vec{n}) = E_{n2}; \quad n_2 \uparrow\uparrow \vec{n}$$
$$E_{n_1} = (\vec{E},\vec{n}_1) = -(\vec{E},\vec{n}) = E_{n1}; \quad n_1 \downarrow\uparrow \vec{n},$$

тому

$$\oiint\limits_S \vec{E}d\vec{S} \approx E_{2n}\Delta S - E_{1n}\Delta S + N_{бок.пов.}$$

Інтеграл $\oiiint\limits_V \rho dV$ оцінимо за допомогою теореми про середнє значення інтегралу

$$\oiiint\limits_V \rho dV \approx \rho\Delta V = \rho\Delta Sh.$$

Маємо

$$E_{2n}\Delta S - E_{1n}\Delta S + N_{бок.пов.} \approx \rho\Delta Sh.$$

Нехай $h \to 0$ так, щоб основи циліндру співпали б з особливою поверхнею. Площина бокової поверхні $\Delta S_{бок.} \to 0$. Це твердження вірне, якщо на боковій поверхні немає точкових зарядів. В граничному випадку $h \to 0$

$$\left(E_{2n} - E_{1n}\right)\cancel{\Delta S} = 4\pi\cancel{\Delta S}\lim_{h\to 0}\left(\rho h\right);$$
$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\lim_{h\to 0}\left(\rho h\right) = 4\pi\sigma.$$

Остаточно маємо граничну умову для нормальних компонент вектору напруженості електричного поля

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \tag{5.47}$$

Тут $\sigma = \lim\limits_{h\to 0}\left(\rho h\right)$ – поверхнева густина заряду. Поверхнева густина заряду $\sigma \neq 0$, якщо на особливій поверхні є точкові заряди. Граничні умови (5.47) означають, що на зарядженій поверхні нормальні компоненти напруженості електричного поля змінюються стрибком.

Ті ж самі викладки можемо повторити для дивергентного рівняння $\mathrm{div}\vec{H} = 0$. Магнітних зарядів не існує, тому Нормальні компоненти напруженості магнітного поля на будь-якій поверхні нерозривні

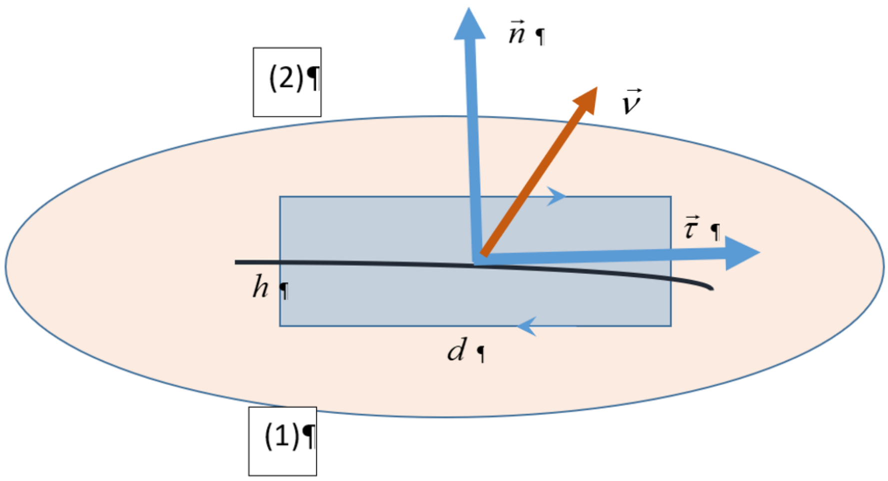
$$\oiint_S \vec{H}d\vec{S} \approx H_{n_2}\Delta S + H_{n_1}\Delta S + N_{бок.пов.} = H_{2n}\Delta S - H_{1n}\Delta S + N_{бок.пов.} = 0;$$

$$H_{n_2} = H_{2n}; \quad H_{n_1} = -H_{1n};$$

$$h \to 0, \quad \Delta S_{бок.} \to 0; \quad \left(H_{2n} - H_{1n}\right)\Delta S + \cancel{\underbrace{N_{бок.пов.}}_{\to 0}} = 0;$$

$$H_{2n} - H_{1n} = 0. \tag{5.48}$$

Розглянемо тепер граничні умови **для тангенціальних компонент напруженостей.** Обираємо нескінченно малий замкнений прямокутний контур так, як показано на рис. нижче.



Контур лежить у площині, перпендикулярній особливій поверхні. Три одиничні взаємно перпендикулярні вектори: $\vec{n}$ – нормалі до особливої поверхні та двох дотичних до неї $\vec{\tau}$ та $\vec{\nu}$ орієнтуємо так, щоб $\vec{n}$ та $\vec{\tau}$ лежали у площині прямокутного контуру, а вектор $\vec{\nu}$ був перпендикулярним площині обраного контуру. Почнемо з теореми о циркуляції для магнітного поля

$$\oint_C \vec{H}d\vec{r} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E}d\vec{S} + \frac{4\pi}{c}\iint_S \vec{j}d\vec{S}.$$

Інтеграл по замкненому контуру

$$\oint_C \vec{H}d\vec{r} \approx \left(H_{2\tau} - H_{1\tau}\right)d + C_{бок.}.$$

Струм через прямокутний контур

$$\iint\limits_{\Delta s} \vec{j} d\vec{S} = \iint\limits_{\Delta s} (\vec{j}, \vec{\nu}) dS = j_\nu \Delta S = j_\nu hd.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S} \vec{E} d\vec{S} = \iint\limits_{S} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_\nu hd \,.$$

$$\left(H_{2\tau} - H_{1\tau} \right) d + C_{бок.} \approx \frac{4\pi}{c} j_\nu hd + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_\nu hd.$$

Переходимо до границі $h \to 0$. Тоді

$$\left(H_{2\tau} - H_{1\tau} \right) d + \underbrace{\cancel{C_{бок.}}}_{\to 0} \approx \frac{4\pi}{c} \underbrace{j_\nu hd}_{\to i_\nu} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_\nu hd}}_{\to 0} \;;$$

Ввели поверхневий струм

$$i_\nu = \lim_{h \to 0} (j_\nu h).$$

та отримали

$$\left(H_{2\tau} - H_{1\tau} \right) \cancel{d} = \frac{4\pi}{c} i_\nu \cancel{d}.$$

Гранична умова для тангенціальних компонент напруженості магнітного поля

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_\nu. \tag{5.49}$$

Означає, що при наявності поверхневого струму тангенціальні компоненти напруженості магнітного поля мають стрибок на особливій поверхні.

Очевидно, що з рівняння

$$\oint\limits_{C} \vec{E} d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S} \vec{H} d\vec{S}$$

виходить неперервність тангенціальних компонент напруженості електричного поля

$$\left(E_{2\tau}-E_{1\tau}\right)d+C_{бок.}\approx-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)_{\nu}hd;$$

$$h\to 0;\quad \left(E_{2\tau}-E_{1\tau}\right)d+\underbrace{\cancel{C_{бок.}}}_{\to 0}\approx\underbrace{\cancel{-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)_{\nu}hd}}_{\to 0};$$

$$\left(E_{2\tau}-E_{1\tau}\right)d=0;\quad E_{2\tau}-E_{1\tau}=0.$$

Тангенціальні компоненти напруженості електричного поля залишаються неперервними на особливій поверхні

$$E_{2\tau}-E_{1\tau}=0. \tag{5.50}$$

У підсумку отримали такі граничні умови для компонент напруженості електричного та магнітного поля на особливих поверхнях:

$$\begin{aligned}&E_{2n}-E_{1n}=4\pi\sigma;\quad H_{2n}-H_{1n}=0;\\&E_{2\tau}-E_{1\tau}=0;\quad H_{2\tau}-H_{1\tau}=\frac{4\pi}{c}i_{\nu}.\end{aligned} \tag{5.51}$$

Умови (5.51) можна представити у векторному вигляді:

$$\begin{aligned}&\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1,\vec{n}\right)=4\pi\sigma;\quad \left(\vec{H}_2-\vec{H}_1,\vec{n}\right)=0;\\&\left[\vec{n},\vec{E}_2-\vec{E}_1\right]=0;\quad \left[\vec{n},\vec{H}_2-\vec{H}_1\right]=\frac{4\pi}{c}i_{\nu}.\end{aligned} \tag{5.52}$$